Serie di Fourier

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, limitata e integrabile su $[0, 2\pi]$.
Si associa a f la serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Osservazione. I coefficienti si possono ottenere integrando su un periodo (=intervallo di lunghezza 2π) qualsiasi di f, ad esempio su $[-\pi, \pi]$.

Simmetrie.

$$f \text{ pari} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x \\ \quad\; = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x, \ \forall\, n \geq 0 \\ \\ b_n = 0 \ \forall\, n \geq 1, \end{cases}$$

$$f \text{ dispari} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_n = 0 \ \forall\, n \geq 0 \\ \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x \\ \quad\; = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x, \ \forall\, n \geq 1 \end{cases}$$

Sia S_k la ridotta k-esima:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

come converge S_k a f per $k \to \infty$?

Convergenza in media quadratica. Si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^{2\pi} |S_k(x) - f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0,$$

da cui

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^{2\pi} |S_k(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^{2\pi} S_k(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Uguaglianza di Parseval. Si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Convergenza puntuale. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (estensione 2π-periodica di una funzione su $[0, 2\pi]$)

- è continua a tratti in $[0, 2\pi]$
- in $x_0 \in \mathbb{R}$ verifica almeno una di queste proprietà:
  - f è derivabile in x_0
  - f è continua in x_0 ed esistono (finite) la der. destra $f'_+(x_0)$ e la der. sinis. $f'_-(x_0)$
  - f ha in x_0 un punto di salto ed esistono finite

$$\text{la pseudoder. destra } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$$

$$\text{e la pseudoder. sinistra } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$$

allora S_k converge in x_0 a $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.
(oppure, Criterio di Dirichlet: f limitata e monotona a tratti).

Convergenza uniforme. Se $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ è C^1 a tratti su $[0, 2\pi]$,

- allora $\forall\, [a, b] \subset (0, 2\pi)$ su cui f è continua

$$S_k \to f \text{ uniformemente su } [a, b]$$

- se inoltre $f(0) = f(2\pi)$, allora

$$S_k \to f \text{ uniformemente su } [0, 2\pi]$$

Osservazione. Se f è periodica con periodo $T > 0$, le formule diventano

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

e l'identità di Parseval è

$$\frac{2}{T}\int_0^T f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

e i risultati di convergenza valgono con ovvie modifiche.